مكثف
النجوم
في
الرياضيات

النهايات والاتصال / الفرع العلمي

اعداد الاستاذ

إياد عماد عباد

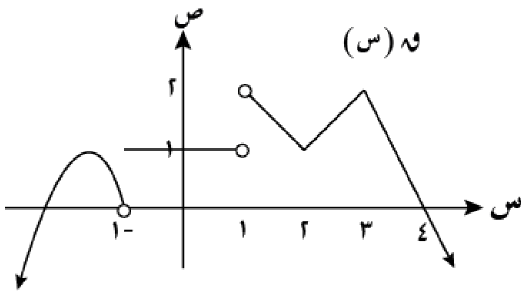
0799366611

eyad emad abbad eyad _ abbad

الوحدة الأولى : النهايات والاتصال :

مثال (١) :

معتمدا على الشكل ، اوجد ما يلي :



أ) مجموعة قيم (أ) حيث $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ه(س) = ١$

ب) مجموعة قيم (ب) حيث $\underset{س \to ب^{+}}{\text{نها}}\ ه(س) = ١$

ج) مجموعة قيم (جـ) حيث $\underset{س \to جـ}{\text{نها}}\ ه(س) = \text{غ.م}$

د) مجموعة قيم (د) حيث $\underset{س \to د}{\text{نها}}\ ه(س) = ٠$

مثال (٢) :

٨) اذا كـــــان $ق(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، \quad س < ٢ \\ ٢س & ، \quad س > ٢ \end{cases}$

احسب باستخدام الجدول

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢	١,٩	١,٥
ق(س)	٤,٢	٤,٠٢	٤,٠٠٢	٤	٦,٩	٣,٥

الحل :

من خلال الجدول

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}}\ ق(س) = ٤$ ، $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}}\ ق(س) = ٤$

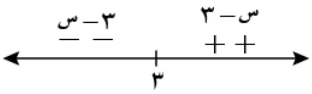
$\therefore \underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س) = ٤$

مثال (٣) :

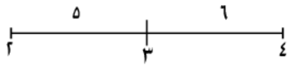
جد $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ |س - ٣|[س + ٣]$

الحل :

$|س - ٣|$



$[س + ٣]$



$ق(س) = \begin{cases} (٣ - س) \times ٥ & ، \quad ٢ \le س < ٣ \\ (س - ٣) \times ٦ & ، \quad ٣ \le س < ٤ \end{cases}$

$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نها}}\ (س - ٣)(٦) = ٠$ ، $\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نها}}\ (٣ - س) \times ٥ = ٠$

$\therefore \underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ ق(س) = ٠$

مثال (٤) :

١) اذا كـــــان $ق(س) = \begin{cases} ١ & ، \quad |س| \le ١ \\ ٠ & ، \quad |س| > أ \end{cases}$

احسب $\underset{س \to ١}{\text{نها}}\ ق(س)$

الحل :

$ق(س) = \begin{cases} ١ & ، \quad -١ < س < ١ \\ ٠ & ، \quad س > ١ \\ ٠ & ، \quad س < -١ \end{cases}$

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نها}}\ ٠ = ٠$ ، $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نها}}\ ١ = ١$

$\therefore \underset{س \to ١}{\text{نها}}\ ق(س)$ غير موجودة

٢) اذا كـــان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|س|}{س} & ، \quad س > ٠ \\ \left[\dfrac{س}{٣} + ٢\right] & ، \quad س < ٠ \end{cases}$

احسب $\underset{س \to ١}{\text{نها}}\ ق(س)$

الحل :

$\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نها}}\ \dfrac{|س|}{س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \dfrac{س}{س} = ١$ ، $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نها}}\ ١ = ١$

$\therefore \lim_{\text{س}\to 0} \text{ق(س)} = 1$ غير موجودة

مثال (٥) :

اذا كانت $\lim_{\text{س}\to 3} \frac{\text{ق(س)}}{\text{س}^2-9} = 5$ ، احسب $\lim_{\text{س}\to 3} \frac{\text{ق(س)}}{\text{س}-3}$

الحل :

$$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{\text{ق(س)}}{\text{س}-3} = \lim_{\text{س}\to 3} \frac{\text{ق(س)}}{\text{س}-3} \times \frac{\text{س}+3}{\text{س}+3}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 3} \frac{\text{ق(س)}}{\text{س}^2-9} \times \text{س}+3 = 5\times 6 = 30$$

مثال (٦) :

جد قيمة النهايات الآتية :

١) $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^3-\text{س}^2-2\text{س}}{\text{س}^4-16} = \frac{0}{0}$

الحل :

$$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}(\text{س}^2-\text{س}-2)}{\text{س}^4-16}$$

$$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}(\text{س}-2)(\text{س}+1)}{(\text{س}^2-4)(\text{س}^2+4)}$$

$$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}+1)}{\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}+2)(\text{س}^2+4)}$$

$$= \frac{2(2+1)}{4\times(4+4)} = \frac{6}{32}$$

٢) $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{2\text{س}^3-3\text{س}-10}{\text{س}^2-4} = \frac{0}{0}$

الحل :

نستخدم القسمة التركيبية :

$2\text{س}^3 - 3\text{س} - 10$ بالقسمة على س − ٢

	س^3	س^2	س	ثابت
	٢	٠	-٣	-١٠
$\boxed{2}$		٤	٨	١٠
	٢	٤	٥	٠

$$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\cancel{(\text{س}-2)}(2\text{س}^2+4\text{س}+5)}{\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}+2)} = \frac{21}{4}$$

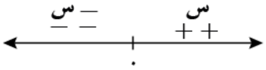
٣) $\lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{\text{س}^2-[\text{س}]}{\text{س}^2-|\text{س}|}$

الحل :

$[\text{س}] \Leftarrow \text{ل} = 1$ ، $\text{س} = 0$

$[\text{س}] = 1\}$ ، $1 \le \text{س} < 2$

$|\text{س}| = 0 \Leftarrow \text{س} = 0$



$$\lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{\text{س}^2-1}{\text{س}^2-\text{س}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{\cancel{(\text{س}-1)}(\text{س}+1)}{\text{س}\cancel{(\text{س}-1)}} = 2$$

مثال (٧) :

١٦) اذا كانت $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{|\text{س}+\text{أ}|-2}{\text{س}-1} = -1$ ، فما قيمة (أ)

الحل :

بما ان التعويض بالمقام يساوي صفر فإن البسط يساوي صفر

$|\text{س}+\text{أ}|-2 = 0 \Leftarrow |\text{س}+\text{أ}| = 2$

اما : $1+\text{أ} = 2 \Leftarrow \text{أ} = 1$

او : $1+\text{أ} = -2 \Leftarrow \text{أ} = -3$

حالة (١) : $\text{أ} = 1$

$$\lim_{\text{س}\to 1} \frac{|\text{س}+1|-2}{\text{س}-1}$$

$$\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}+1-2}{\text{س}-1} = \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}-1}{\text{س}-1} = 1 \text{ مرفوضة}$$

حالة (٢) : $\text{أ} = -3$

$$\lim_{\text{س}\to 1} \frac{|\text{س}-3|-2}{\text{س}-1}$$

$$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \frac{٣ - س - ٢}{س - ١} = \underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \frac{١ - س}{س - ١} = -١ \Leftarrow أ = -٣$$

مثال (٨) :

جد قيمة النهايات الآتية :

٤) $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \frac{٩^{س} - ٤ \times ٣^{س+١} + ٢٧}{٣^{س} - ٣}$

الحل :

نفرض : ص $= ٣^{س}$ ، س $\to ١$ ، ص $\to ٣$

$$\underset{ص\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{ص^{٢} - ١٢ص + ٢٧}{ص - ٣}$$

$$\underset{ص\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(ص - ٩)\cancel{(ص - ٣)}}{\cancel{ص - ٣}} = -٦$$

٢) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ١٢}{س^{٢} - ٤} - \frac{س + ٢}{س - ٢}$

الحل :

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ١٢}{س^{٢} - ٤} - \frac{س + ٢}{س - ٢} \times \frac{س + ٢}{س + ٢}$$

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ١٢ - (س + ٢)^{٢}}{س^{٢} - ٤}$$

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{س^{٢}} + ١٢ - \cancel{س^{٢}} - ٤س + ٤}{س^{٢} - ٤}$$

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٨ - ٤س}{س^{٢} - ٤} = \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٤\overset{-١}{\cancel{(٢ - س)}}}{\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)} = -١$$

٣) $\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ٣س}} - \frac{١}{٢}\right)\left(\frac{٢}{س^{٢} - ١٦}\right)$

الحل :

$$\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢ - \sqrt{س^{٢} - ٣س}}{٢\sqrt{س^{٢} - ٣س}} \times \left(\frac{٢}{س^{٢} - ١٦}\right)$$

$$\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢ - \sqrt{س^{٢} - ٣س}}{٢\sqrt{س^{٢} - ٣س}} \times \frac{٢ + \sqrt{س^{٢} - ٣س}}{٢ + \sqrt{س^{٢} - ٣س}} \times \left(\frac{٢}{س^{٢} - ١٦}\right)$$

$$\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٤ - س^{٢} + ٣س}{٢\sqrt{س^{٢} - ٣س}\left(٢ + \sqrt{س^{٢} - ٣س}\right)} \times \frac{٢}{س^{٢} - ١٦}$$

$$\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{-\cancel{(س - ٤)}(س + ١)}{٨\cancel{(س - ٤)}(س + ٤)} = \frac{-٥}{٦٤}$$

٤) $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س}} - ١\right)\left(\frac{١}{س - ١}\right)$

الحل :

$$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س}} - \frac{١}{١}\right)\left(\frac{١}{س - ١}\right)$$

$$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{١ - \sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٣]{س}}\right)\left(\frac{١}{س - ١}\right) \times \frac{١ + \sqrt[٣]{س} + \left(\sqrt[٣]{س}\right)^{٢}}{١ + \sqrt[٣]{س} + \left(\sqrt[٣]{س}\right)^{٢}}$$

$$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\overset{-١}{\cancel{١ - س}}}{\sqrt[٣]{س}} \times \frac{١}{\cancel{س - ١}} \times \frac{١}{٣} = \frac{-١}{٣}$$

٥) $\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ١} + \sqrt{س} - ١}{\sqrt{س} - ١}$

الحل :

$$\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ١}}{\sqrt{س - ١}} + \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} - ١}{\sqrt{س - ١}} \times \frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} + ١}$$

$$\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{(س - ١)(س + ١)}}{\sqrt{س - ١}} + \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{س - ١}{\sqrt{س - ١}\left(\sqrt{س} + ١\right)} \times \frac{\sqrt{س - ١}}{\sqrt{س - ١}}$$

$$\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ١}\,\cancel{\sqrt{س - ١}}}{\cancel{\sqrt{س - ١}}} + \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س - ١)}\left(\sqrt{س - ١}\right)}{\cancel{(س - ١)}\left(\sqrt{س} + ١\right)}$$

$$= \sqrt{٢} + ٠ = \sqrt{٢}$$

٦) $\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^{٢}\sqrt{س} - ٧٢}{س - ٤}$

الحل :

نضيف ونطرح : $(س + ٢)^{٢}\sqrt{س} = ٣٦\sqrt{س}$

$$\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^{٢}\sqrt{س} - ٣٦\sqrt{س}}{س - ٤} + \underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٣٦\sqrt{س} - ٧٢}{س - ٤}$$

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}}\left((\text{س}+٢)^{٢}-٣٦\right)}{\text{س}-٤} + ٣٦\,\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}}\left(\frac{\sqrt{\text{س}}-٢}{\text{س}-٤}\times\frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\right)$$

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}}\left(\cancel{(\text{س}+٢-٦)}\,(\text{س}+٢+٦)\right)}{\cancel{\text{س}-٤}} + \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{٣٦\cancel{(\text{س}-٤)}}{(٢)\cancel{(\text{س}-٤)}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \sqrt{\text{س}}\,(\text{س}+٨) + \frac{٣٦}{٤}$$

$$= ٢(١٢)+٩ = ٢٤+٩ = ٣٣$$

---

٧) $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٧+\sqrt[٣]{\text{س}}}-٣}{\text{س}-٨}$

الحل :

$$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٧+\sqrt[٣]{\text{س}}}-٣}{\text{س}-٨}\times\frac{\sqrt{٧+\sqrt[٣]{\text{س}}}+٣}{\sqrt{٧+\sqrt[٣]{\text{س}}}+٣}$$

$$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \frac{٧+\sqrt[٣]{\text{س}}-٩}{(\text{س}-٨)\left(\sqrt{٧+\sqrt[٣]{\text{س}}}+٣\right)}$$

$$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}-٢}{(\text{س}-٨)\left(\sqrt{٧+\sqrt[٣]{\text{س}}}+٣\right)}\times\frac{\left(\sqrt[٣]{\text{س}}\right)^{٢}+٢\sqrt[٣]{\text{س}}+٤}{\left(\sqrt[٣]{\text{س}}\right)^{٢}+٢\sqrt[٣]{\text{س}}+٤}$$

$$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \frac{\text{س}-٨}{(\text{س}-٨)(٣+٣)(٤+٤+٤)} = \frac{١}{٧٢}$$

مثال (٩) :

١) اذا كانــــت $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}+\text{أس}+\text{ب}}{\text{س}-٥} = ٨$ ،

فما قيم أ ، ب

الحل :

بما أن المقام يساوي صفر فإن البسط يساوي صفر

$$٢٥+٥\text{أ}+\text{ب} = ٨ \Leftarrow \text{ب} = ٥\text{أ}-٢٥$$

$$\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}+\text{أس}-٥\text{أ}-٢٥}{\text{س}-٥} = ٨$$

$$\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}-٢٥}{\text{س}-٥} + \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\text{أ}\cancel{(\text{س}-٥)}}{\cancel{\text{س}-٥}} = ٨$$

$$\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \text{س}+٥+\text{أ} = ٨$$

$$\Leftarrow ١٠+\text{أ} = ٨ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -٢}$$

$$\text{ب} = -٥\text{أ}-٢٥ = -٥\times-٢-٢٥$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{ب} = -١٥}$$

---

٢) اذا كانــت $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}-٣}{\text{س}^{٢}+\text{أس}+\text{ب}}$ غيــر موجـودة ،

فما قيم أ ، ب

الحل :

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}+\text{أس}+\text{ب}}{\text{س}-٣} = ٠$$

بما ان البسط يساوي صفر

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \text{س}^{٢}+\text{أس}+\text{ب} = ٠$$

$$\Leftarrow \text{أ}^{٢}+٣\text{أ}+\text{ب} = ٠ \Leftarrow \text{ب} = -٣\text{أ}-٩$$

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}+\text{أس}-٣\text{أ}-٩}{\text{س}-٣} = ٠$$

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}+-٩}{\text{س}-٣} + \text{أ}\,\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}-٣}{\text{س}-٣} = ٠$$

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \text{س}+٣+\text{أ} = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -٦}$$

$$\text{ب} = -٣\text{أ}-٩ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٩}$$

---

٣) اذا كانــــــــــــــت أ ، ب $\in$ ح وكانــــــــــــــت

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣}-\text{أس}+٣}{\text{س}-١} & ، \text{س} > ١ \\ \text{بس}-٥ & ، \text{س} < ١ \end{cases}$$

فما قيم أ ، ب التي تجعل $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س})$ موجودة

الحل :

$\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س})$ موجودة

وبما ان المقام يساوي صفر فإن البسط يساوي صفر

$$\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}} \text{س}^{٣}-\text{أس}+٣ = ٠$$

$$١-\text{أ}+٣ = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٤}$$

$$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣ - \text{أ}\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}$$ قسمة تركيبية

$$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\text{س} - ١)}\,(\text{س}^٢ + \text{س} - ٣)}{\cancel{\text{س} - ١}} = ١ + ١ - ٣ = -١$$

$$\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}} \text{ب}\text{س} - ٥ = \text{ب} \times ١ - ٥ = -١ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٤}$$

مثال (١٠) :

٢٤) اذا كانت $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - ٩}{\text{س} - ٣} = ١٤$ ، احسب

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{س}^٢}{\text{س} - ٣}$$

الحل :

نضيف ونطرح (٩) :

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{س}^٢ + ٩ - ٩}{\text{س} - ٣}$$

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - ٩}{\text{س} - ٣} + \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٩ - \text{س}^٢}{\text{س} - ٣}$$

$$١٤ + \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٣)\,\overset{-١}{\cancel{(\text{س} - ٣)}}}{\cancel{\text{س} - ٣}} = ١٤ + (-٦) = ٨$$

مثال (١١) :

٢٩) اثبت ان : $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[\text{ن}]{١ + \text{س} + \text{س}^٢} - ١}{\text{س} + \text{س}^٢} = \frac{١}{\text{ن}}$

الحل :

نفرض : $\text{ص} = \sqrt[\text{ن}]{١ + \text{س} + \text{س}^٢}$

$\text{س} \to ٠$ ، $\text{ص} \to ١$

$\text{ص} = ١ + \text{س} + \text{س}^٢ \Leftarrow \text{ص}^\text{ن} - ١ = \text{س} + \text{س}^٢$

$$\Leftarrow \underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص} - ١}{\text{ص}^\text{ن} - ١} = \frac{١}{\text{ن}}$$

مثال (١٢) :

جد قيمة النهايات الاتية :

١) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} ٣\text{س}^٢ \,\text{قتا}٣\text{س}\,\text{ظتا}٢\text{س}\,\text{قا}٥\text{س}$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} ٣\text{س} \times \text{س} \times \frac{١}{\text{جا}٣\text{س}} \times \frac{١}{\text{ظا}٢\text{س}} \times \frac{١}{\text{جتا}٥\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}}{\text{جا}٣\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{ظا}٢\text{س}} \times \frac{١}{\text{جتا}٥\text{س}}$$

$$= \frac{٣}{٣} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥} = \frac{١}{٢}$$

٢) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}٢\text{س} + \text{س}^٢ - \text{جتا}^٢\text{س}}{٢\text{س}^٢}$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{جتا}^٢\text{س} - ١ + \text{س}^٢ - \text{جتا}^٢\text{س}}{٢\text{س}^٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}^٢\text{س} - ١ + \text{س}^٢}{٢\text{س}^٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}^٢\text{س}}{٢\text{س}^٢} + \frac{\text{س}^٢}{٢\text{س}^٢} = \frac{-١}{١} \times \frac{١}{١} + \frac{١}{٢} = ٠$$

٣) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}^٣ - ١}{\text{س} - ١}$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\dfrac{\text{جاس}^٣ - ١}{\text{س}^٣ - ١}}{\dfrac{\text{س} - ١}{\text{س}^٣ - ١}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\dfrac{\cancel{\text{س} - ١}}{\cancel{(\text{س} - ١)}\,(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)}} = ٣$$

٤) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{قاس}}{\text{ظا}^٢\text{س}}$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{قاس}}{\text{قا}^٢\text{س} - ١}$$

$\text{قا}^٢\text{س} = ١ + \text{ظا}^٢\text{س}$
$\text{ظا}^٢\text{س} = \text{قا}^٢\text{س} - ١$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\overset{-١}{\cancel{١ - \text{قاس}}}}{\cancel{(\text{قاس} - ١)}\,(\text{قاس} + ١)} = \frac{-١}{٢}$$

٥) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س جتاس} - \text{س جتا٣س}}{\text{س}^{٢}\ \text{جا٢س}}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{\text{س}}\left(\text{جتاس}-\text{جتا٣س}\right)}{\text{س}^{\cancel{٢}}\ \text{جا٢س}}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{-\cancel{٢}\ \text{جا٢س جا}-\text{س}}{\text{س} \times \cancel{٢}\ \text{جاس جتاس}}$

$= -١ \times -٢ \times \dfrac{١}{\text{جتاس}} = ٢$

٦) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظاس}-\text{جاس}}{\text{س}^{٣}}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \dfrac{\text{جاس}}{١}}{\text{س}^{٣}}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}-\text{جاس جتاس}}{\text{جتاس} \times \text{س}^{٣}}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}\left(١-\text{جتاس}\right)}{\text{جتاس} \times \text{س}^{٣}} \times \dfrac{١+\text{جتاس}}{١+\text{جتاس}}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس} \times \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتاس} \times \text{س}^{٣} \times \left(١+\text{جتاس}\right)} = \dfrac{١}{٢}$

٧) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{١-\text{جتاس}}}{\text{س}}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{١-\text{جتاس}}}{\text{س}} \times \dfrac{\sqrt{١+\text{جتاس}}}{\sqrt{١+\text{جتاس}}}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{١-\text{جتا}^{٢}\text{س}}}{\left(\text{س}\right)\left(\sqrt{١+\text{جتاس}}\right)}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\left|\text{جاس}\right|}{\left(\text{س}\right)\left(\sqrt{٢}\right)}$

$\underset{س\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}}{\left(\text{س}\right)\left(\sqrt{٢}\right)} = \dfrac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\underset{س\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{جاس}}{\left(\text{س}\right)\left(\sqrt{٢}\right)} = \dfrac{-١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{١-\text{جتاس}}}{\text{س}}$ غير موجودة

٨) $\underset{س\to \frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}\frac{٣}{٢}\text{س}}{٣\text{س}-\pi}$

$= \underset{س\to \frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}-\frac{٣}{٢}\text{س}\right)}{٣\text{س}-\pi}$

$= \underset{س\to \frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\frac{١}{٢}\left(\pi-٣\text{س}\right)}{٣\text{س}-\pi} = \dfrac{-١}{٢}$

٩) $\underset{س\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\frac{\pi}{٤}+\text{س}}{\text{س}-\frac{\pi}{٤}}$

$= \underset{س\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}-\left(\frac{\pi}{٤}+\text{س}\right)\right)}{\text{س}-\frac{\pi}{٤}}$

$= \underset{س\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\frac{\pi}{٤}-\text{س}}{\text{س}-\frac{\pi}{٤}} = -١$

١٠) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\frac{\text{س}}{٣}}{\text{س}-٢}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}-\frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س}-٢}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}-\frac{\pi}{\text{س}}}{\frac{\pi}{٢}-\frac{\pi}{\text{س}}}}{\dfrac{\text{س}-٢}{\frac{\pi}{٢}-\frac{\pi}{\text{س}}}} = \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{\text{س}-٢}}{\dfrac{\pi\text{س}-٢\pi}{٢\text{س}}}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} ١ \times \dfrac{\dfrac{\pi\text{س}-٢\pi}{٢\text{س}}}{\text{س}-٢}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} ١ \times \dfrac{\dfrac{\pi\cancel{\left(\text{س}-٢\right)}}{٢\text{س}}}{\cancel{\text{س}-٢}} =$

١١) $\underset{س \to 3\pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}}{\frac{س}{3}-\pi}$

نفرض : $ص = \frac{س}{3} - \pi \Leftarrow س = ص + 3\pi$

$\Leftarrow \frac{س}{3} - \pi = \frac{ص}{3}$

$س \to 3\pi$ ، $ص \to 0$

$= \underset{ص \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(ص + 3\pi)}{\frac{ص}{3}}$

$= \underset{ص \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\text{جاص} + \cancel{\text{جتا}3\pi} + \text{جتاص} + \cancel{\text{جا}3\pi}\right)}{\frac{ص}{3}}$

$= \underset{ص \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{جاص}}{\frac{ص}{3}} = -3$

١٢) $\underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{س^2\,\text{جتاس} + \pi^2}{س - \pi}$

نضيف ونطرح : π^2 جتاس

$= \underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{س^2\,\text{جتاس} + \pi^2}{س - \pi} + \underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi^2\,\text{جتاس} + \pi^2}{س - \pi}$

$= \underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتاس}\left(س^2 + \pi^2\right)}{س - \pi} + \underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi^2\,\text{جتاس} + 1}{س - \pi}$

$= \underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتاس}\,\cancel{(س-\pi)}\,(س+\pi)}{\cancel{س-\pi}} + \underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi^2\left(\text{جتاس}+1\right)}{س-\pi} \times \dfrac{\text{جتاس}-1}{\text{جتاس}-1}$

$= \text{جتا}\pi\,(2\pi) + \underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi^2\,\text{جا}^2س + 1}{(س-\pi)\left(\text{جتاس}-1\right)}$

$= -2\pi + \underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi^2\left(-\text{جا}^2س\right)}{(س-\pi)(-2)}$

$= -2\pi + \underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi^2\left(-\text{جا}(\pi-س)\,\text{جا}(\pi-س)\right)}{(س-\pi)(-2)}$

$= -2\pi + \pi^2 \times 0 = -2\pi$

مثال (١٣) :

٢) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^2س}{س^2} & ، \quad س < 0 \\ [س+1] & ، \quad س = 0 \\ \dfrac{|س|}{س} & ، \quad س > 0 \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٠

الحل :

$ق(0) = [0+1] = 1$

$\underset{س \to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{|س|}{س} = \dfrac{س}{س} = 1$ ، $\underset{س \to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^2س}{س^2} = 1$

$\underset{س \to 1}{\text{نهـا}} ق(س) = 1$

$ق(0) = \underset{س \to 1}{\text{نهـا}} ق(س)$

∴ ق(س) متصل عندما س = ١

مثال (١٤) :

١) $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^2 أس}{س^2} & ، \quad س \neq 0 \\ 4س^2 + 2أ^3 & ، \quad س = 0 \end{cases}$

وكان ق(س) متصل عندما س = ٠ ، فما قيمة (أ)

الحل :

$ق(0) = \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} ق(س)$

$4(0)^2 + 2أ^3 = \underset{س \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^2 أس}{س^2}$

$2أ^3 = أ^2 \Leftarrow 2أ^3 - أ^2 = 0$

$\Leftarrow أ^2(2أ - 1) = 0 \Leftarrow \boxed{أ = 0 \ ، \ أ = \frac{1}{2}}$

٢) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{٢س} + ٨}{\text{س}^{٢} + \text{ب س} + ١}$ ، فما قيم (ب) بحيث يكون متصل على (ح)

الحل :

يجب ان يكون المقام ≠ صفر ، يعني المميز < صفر

$\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ جـ} < ٠$

$\text{ب}^{٢} - ٤ \times ١ \times ١ < ٠ \Leftarrow \text{ب}^{٢} - ٤ < ٠$

قيم ب ∈ (−٢،٢)

++   −٢   −−   ٢   ++

مثال (١٥) :

اذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{٢س}^{٢} - \text{ب}}{\text{س} - ٢} & \text{، س} < ٢ \\ \text{أس} + \text{جـ} & \text{، } ٢ \le \text{س} < ٤ \\ \text{٦س} & \text{، س} \ge ٤ \end{cases}$$

وكان ق(س) متصل على (ح) ، فما قيم أ ، ب ، جـ

الحل :

بما ان الاقتران متصل فإذن $\text{نهـا}_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق}(\text{س})$ موجودة

$\text{نهـا}_{\text{س} \to ٢^{-}} \dfrac{\text{٢س}^{٢} - \text{ب}}{\text{س} - ٢}$ موجودة

المقام يساوي صفر فإن البسط يساوي صفر

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{٢س}^{٢} - \text{ب} = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٨}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \text{نهـا}_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق}(\text{س})$$

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{أس} + \text{جـ} = \text{نهـا}_{\text{س} \to ٢^{-}} \frac{\text{٢س}^{٢} - ٨}{\text{س} - ٢}$$

$$\text{٢أ} + \text{جـ} = \text{نهـا}_{\text{س} \to ٢^{-}} \frac{٢(\text{س}^{٢} - ٤)}{\text{س} - ٢}$$

$$\text{٢أ} + \text{جـ} = \text{نهـا}_{\text{س} \to ٢^{-}} \frac{٢\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)}{\cancel{\text{س} - ٢}}$$

$$\text{٢أ} + \text{جـ} = ٨ \quad ......(١)$$

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to ٤^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \text{نهـا}_{\text{س} \to ٤^{-}} \text{ق}(\text{س})$$

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to ٤^{+}} \text{٦س} = \text{نهـا}_{\text{س} \to ٤^{-}} \text{أس} + \text{جـ}$$

$$٢٤ = \text{أس} + \text{جـ} \quad ......(٢)$$

بحل المعادلتين (١) و (٢) :

$\boxed{\text{أ} = ٨}$ ، $\boxed{\text{جـ} = -٨}$

مثال (١٦) :

١) اذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |٢ - \text{س}| & \text{، س} < \text{أ} \\ [\text{س} + ٥] & \text{، س} \ge \text{أ} \end{cases}$$

وكان ق(س) عندما س = أ ، فما قيمة (أ) بحيث أ ∈ ص

الحل :

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{أ}^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \text{نهـا}_{\text{س} \to \text{أ}^{-}} \text{ق}(\text{س})$$

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{أ}^{+}} |٢ - \text{س}| = \text{نهـا}_{\text{س} \to \text{أ}^{-}} [\text{س} + ٥]$$

$$|٢ - \text{أ}| = \text{أ} - ١ + ٥$$

$$|٢ - \text{أ}| = \text{أ} + ٤$$

اما : $٢ - \text{أ} = \text{أ} + ٤ \Leftarrow -٢ = \text{٢أ} \Leftarrow \text{أ} = -١$

او : $٢ - \text{أ} = -\text{أ} - ٤ \Leftarrow ٦ = -\text{أ} + \text{أ} \Leftarrow ٦ = ٠$ ✗

٢) اذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} + ٤ & \text{، س} < ٢ \\ \text{٥س} & \text{، س} \ge ٢ \end{cases}$$

وكان
$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{، س} < ٢ \\ \text{س}^{٢} + ٢ & \text{، س} \ge ٢ \end{cases}$$

وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س) ، ابحث في الاتصال عندما س = ٢

الحل :

نلاحظ ان ق(س) غير متصل عندما س = ٢ لأن

$$\text{ق}(٢) \ne \text{نهـا}_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س})$$

عندها ننفذ العملية الحسابية (الجمع) :

$$ل = ق + هـ = \begin{cases} س^{٣} + ٤ + س^{٢} & ، \quad س < ٢ \\ ٥س + س^{٢} + ٢ & ، \quad س \geq ٢ \end{cases}$$

$$ل = ق + هـ = \begin{cases} س^{٣} + س^{٢} + ٤ & ، \quad س < ٢ \\ س^{٢} + ٥س + ٢ & ، \quad س \geq ٢ \end{cases}$$

$ل(٢) = ١٦$

$\lim_{س \to ٢^{+}} ل(س) = ١٦$ ، $\lim_{س \to ٢^{-}} ل(س) = ١٦$

$\therefore$ ل(س) متصل عندما $س = ٢$

مثال (١٧) :

١) اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٣} - ٦٤}{س - ٤} & ، \quad س \leq ٣ \\ ٤ - س & ، \quad س > ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله

الحل :

اولا : القواعد :

ق(س) متصل على $(-\infty ، ٣)$ لأنه على صورة اقتران نسبي معرف على مجاله

ق(س) متصل على $(٣ ، \infty)$ لأنه كثير حدود

ثانيا : التحول :

$س = ٣ \Leftarrow ق(٣) = ٣٧$

$\lim_{س \to ٣^{+}} ق(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ٣^{-}} ق(س) = ٣٧$

$\therefore \lim_{س \to ٣} ق(س)$ غير موجودة

$\therefore$ ق(س) غير متصل عند $س = ٣$

ثالثا : الاطراف :

لا يوجد

رابعاً : النتيجة النهائية :

ق(س) متصل على ح $- \{٣\}$

٢) اذا كان $ق(س) = |٣س - ٩|$ ، ابحث في اتصال ق(س) على $[١ ، ٥]$

الحل :

نعيد التعريف :

$٣س - ٩ = ٠ \Leftarrow س = ٣$

$$ق(س) = \begin{cases} ٩ - ٣س & ، \quad ١ \leq س < ٣ \\ ٣س - ٩ & ، \quad ٣ \leq س \leq ٥ \end{cases}$$

اولا : القواعد :

ق(س) متصل على $(١ ، ٣)$ لأنه كثير حدود

ق(س) متصل على $(٣ ، ٥)$ لأنه كثير حدود

ثانيا : التحول :

$س = ٣ \Leftarrow ق(٣) = ٠$

$\lim_{س \to ٣^{+}} ٣س - ٩ = ٠$ ، $\lim_{س \to ٣^{-}} ٩ - ٣س = ٠$

$\therefore \lim_{س \to ٣} ق(س) = ٠$

$\therefore$ ق(س) متصل عند $س = ٣$

ثالثا : الاطراف :

$س = ١$

$ق(١) = ٦$

$\lim_{س \to ١^{+}} ٩ - ٣س = ٦$

ق متصل من اليمين

$س = ٥$

$ق(٥) = ٦$

$\lim_{س \to ٥^{-}} ٣س - ٩ = ٦$

ق متصل من اليسار

رابعاً : النتيجة النهائية :

ق(س) متصل على $[١ ، ٥]$